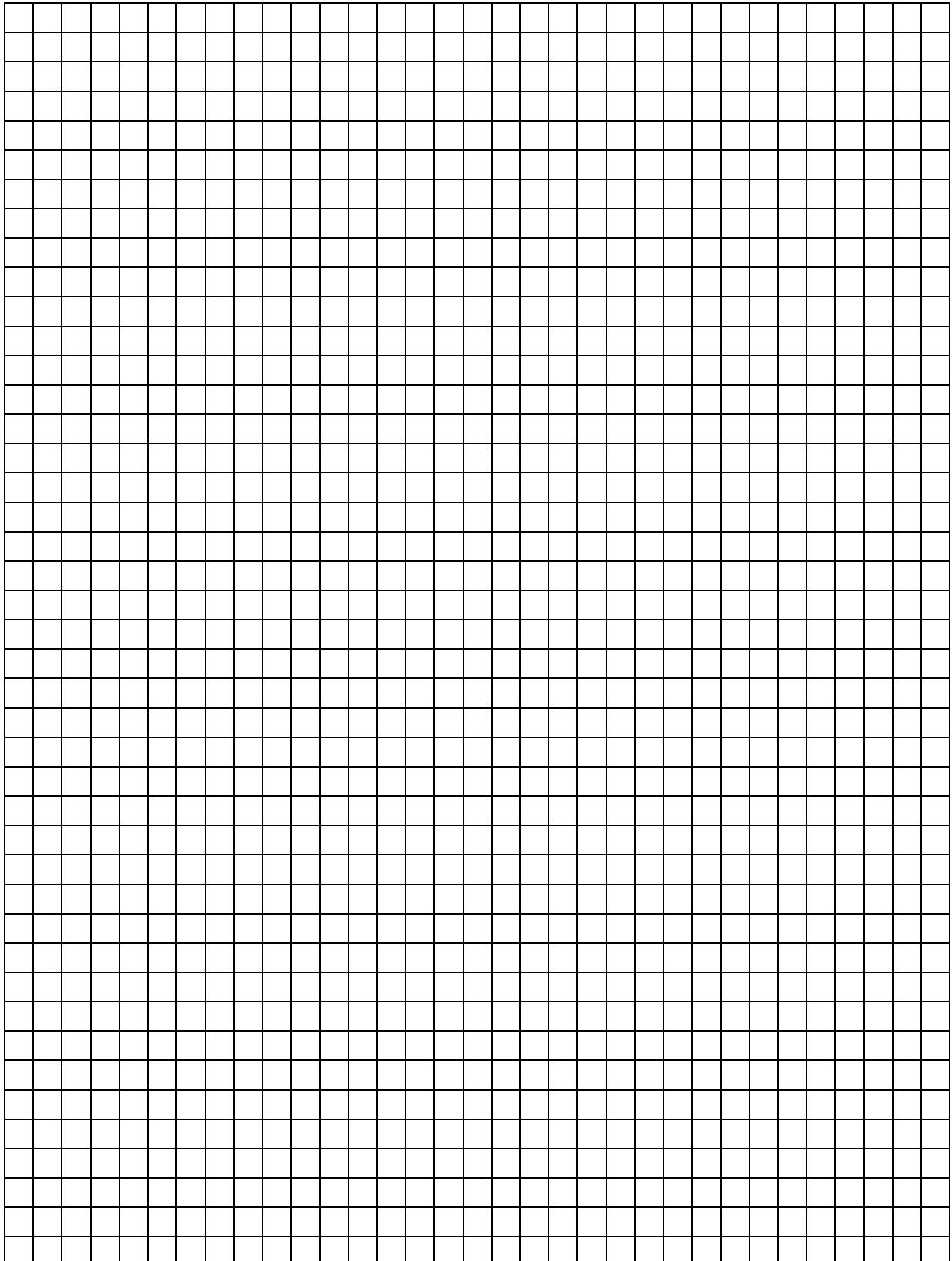


Ciągi liczbowe – poziom rozszerzony

Zadanie 1. (4 pkt)

Źródło: CKE 01.2006 (PR), zad. 14.

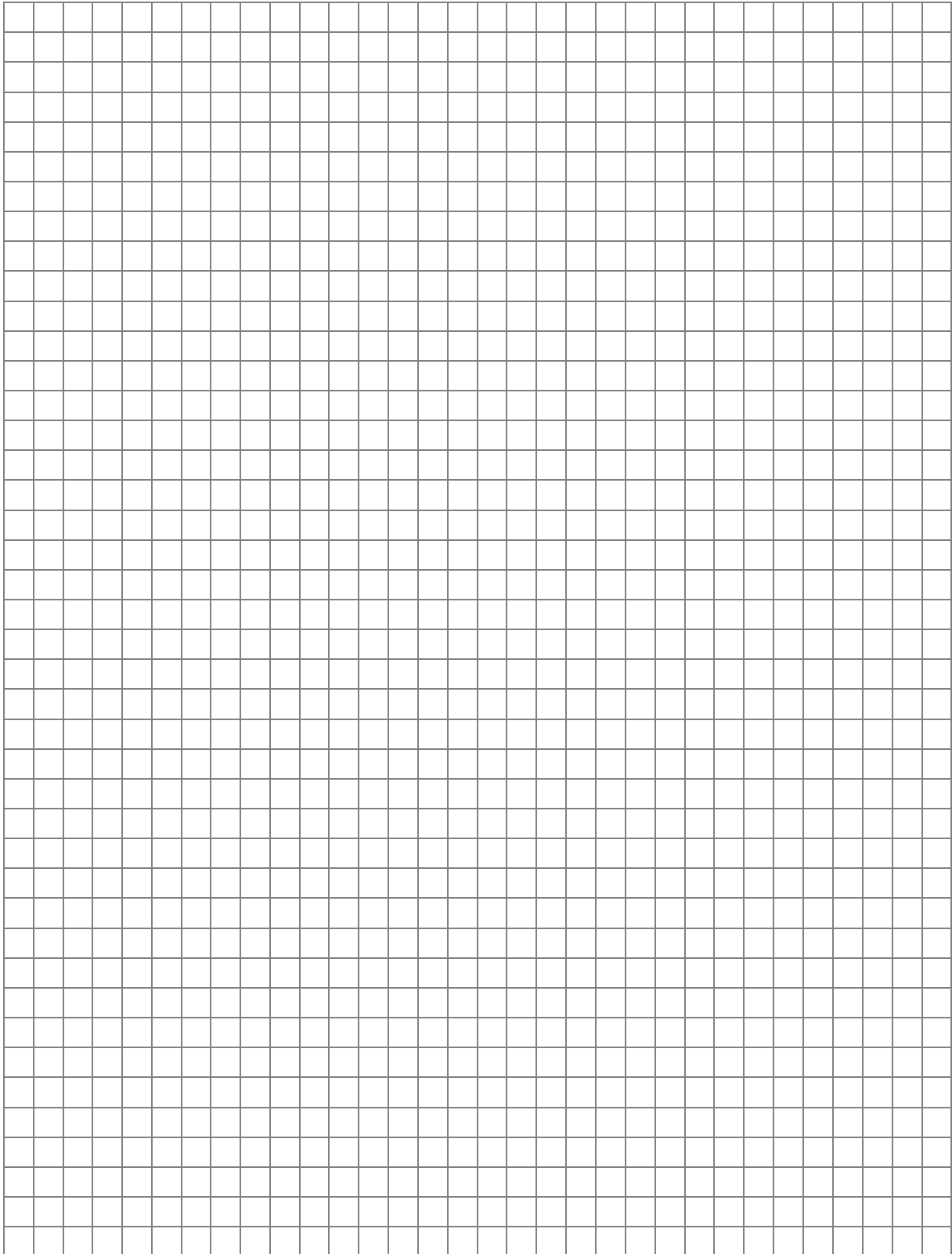
Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a ($a > 0$).



Zadanie 2. (7 pkt)

Źródło: CKE 05.2006 (PR), zad. 19.

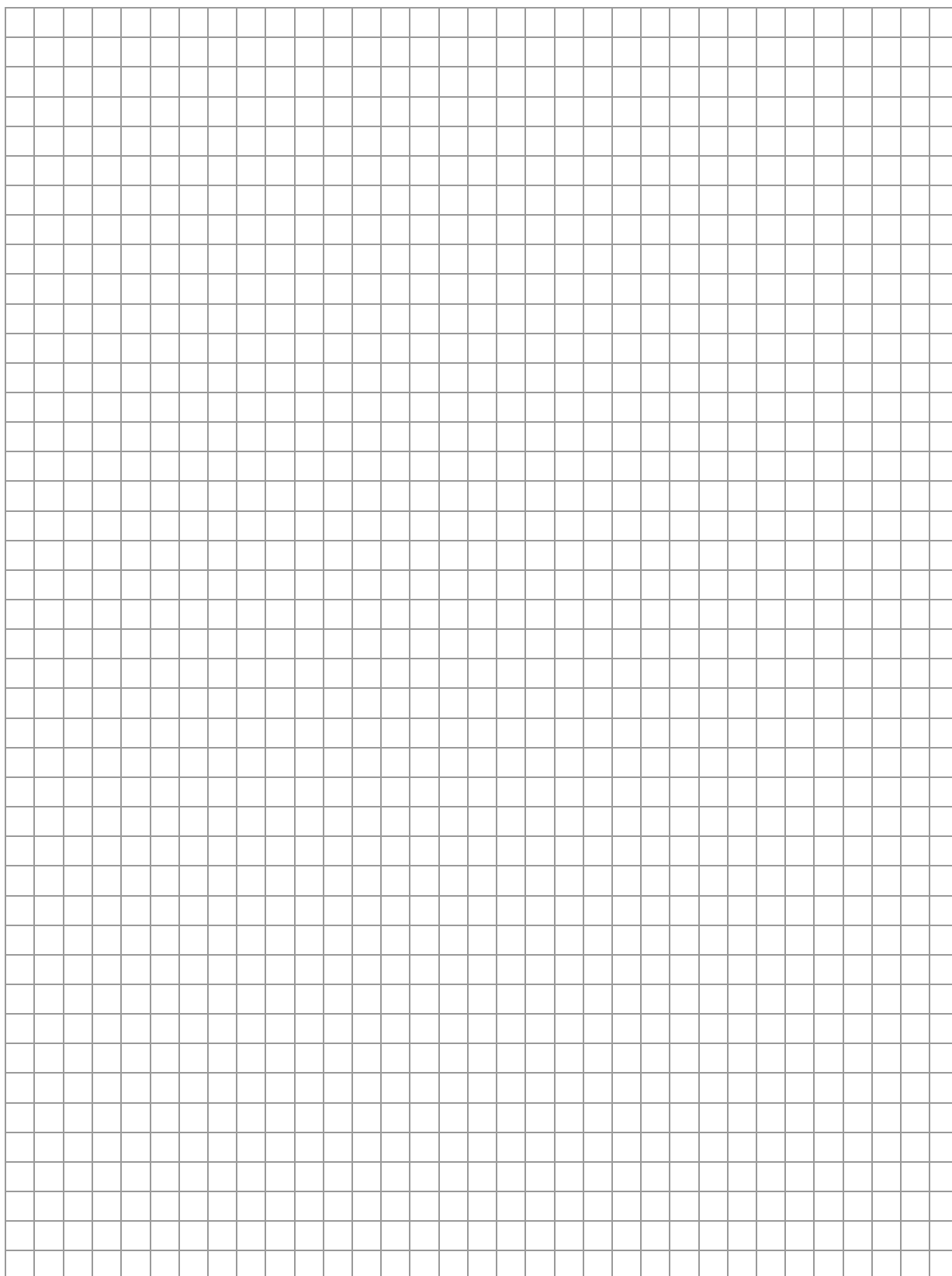
Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k - 2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) .



Zadanie 3. (5 pkt)

Źródło: CKE 11.2006 (PR), zad. 2.

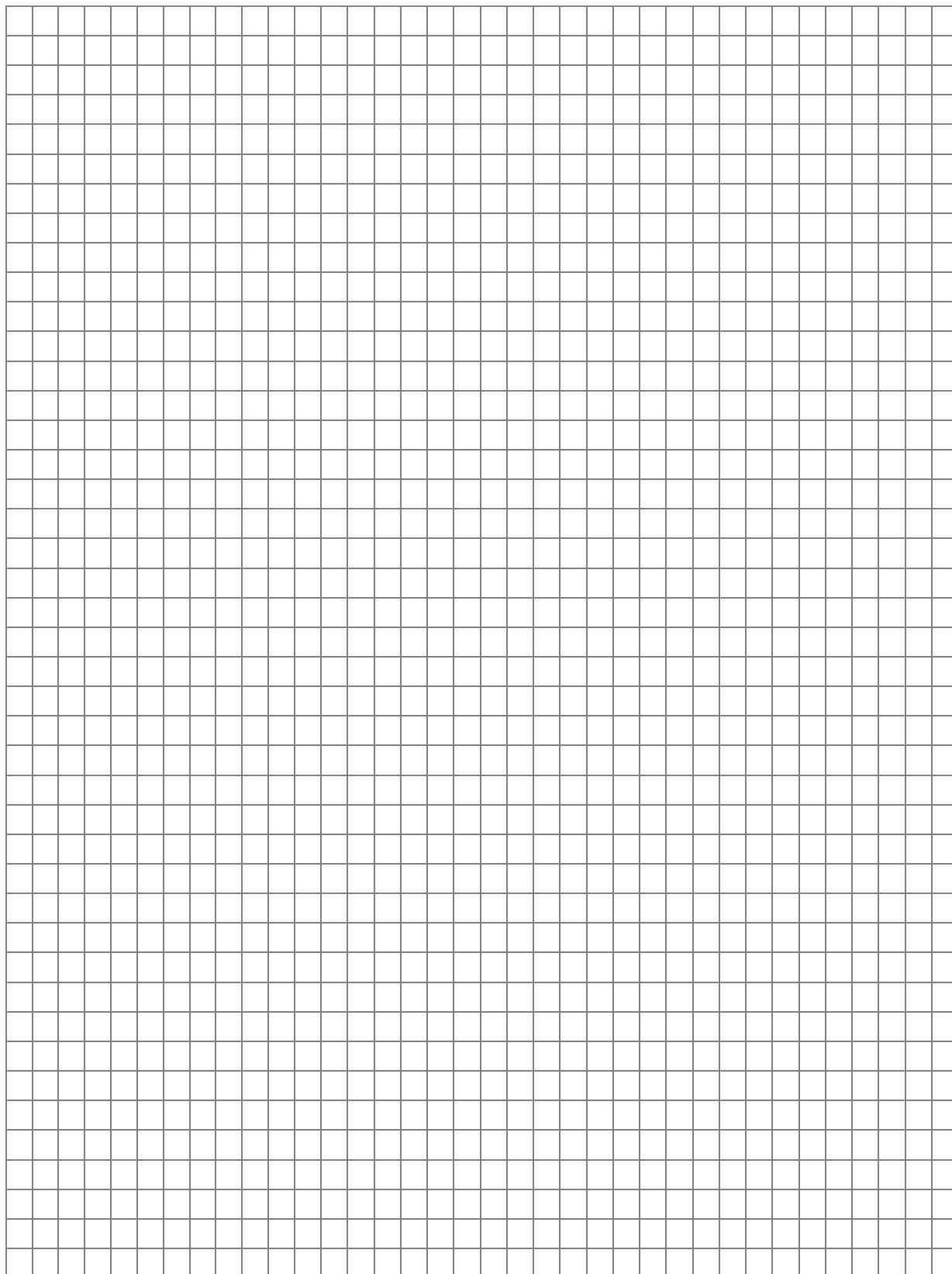
Wyznacz wszystkie wartości $k \in R$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.



Zadanie 5. (3 pkt)

Źródło: CKE 2008 (PR), zad. 6.

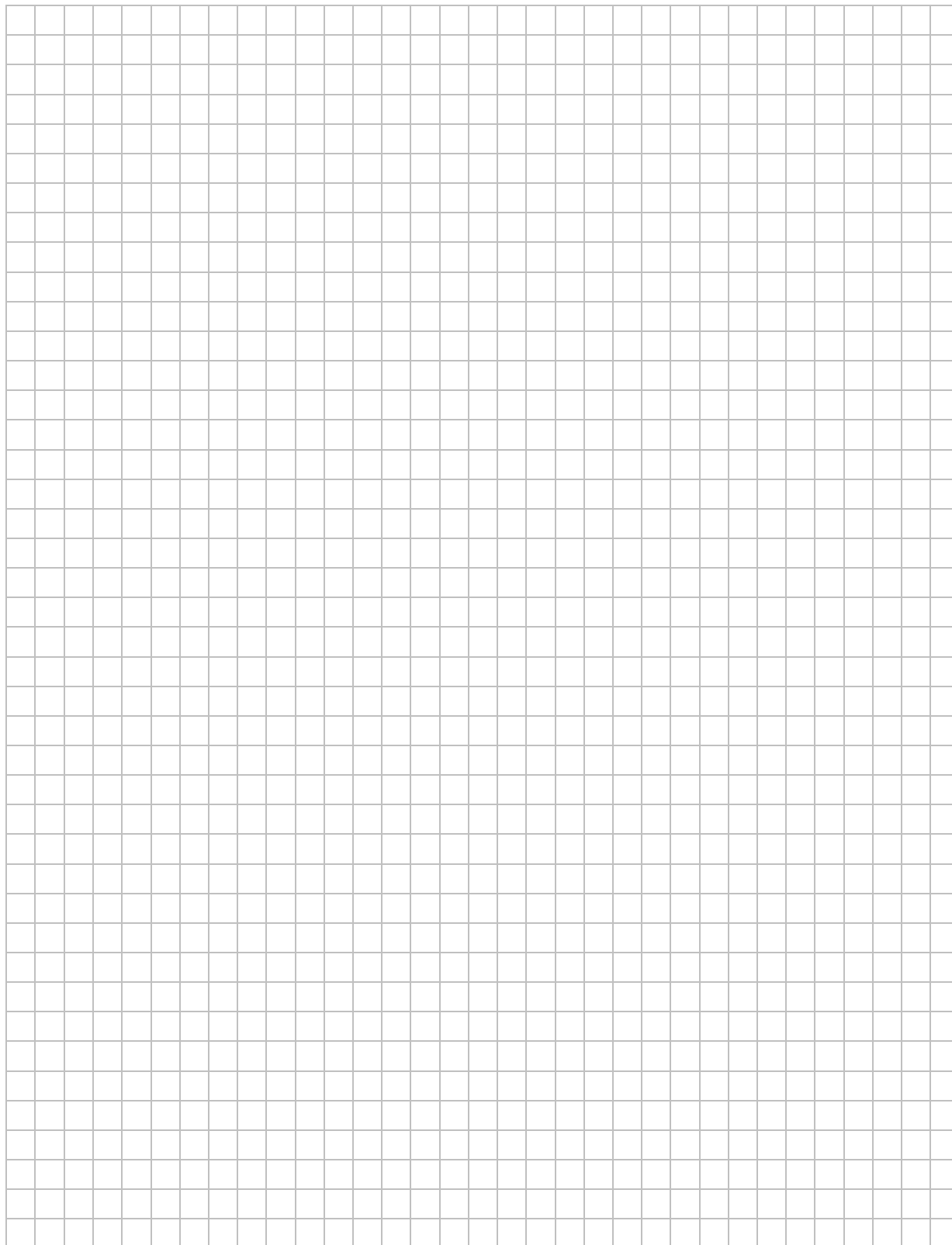
Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.



Zadanie 6. (5 pkt)

Źródło: CKE 2009 (PR), zad. 4.

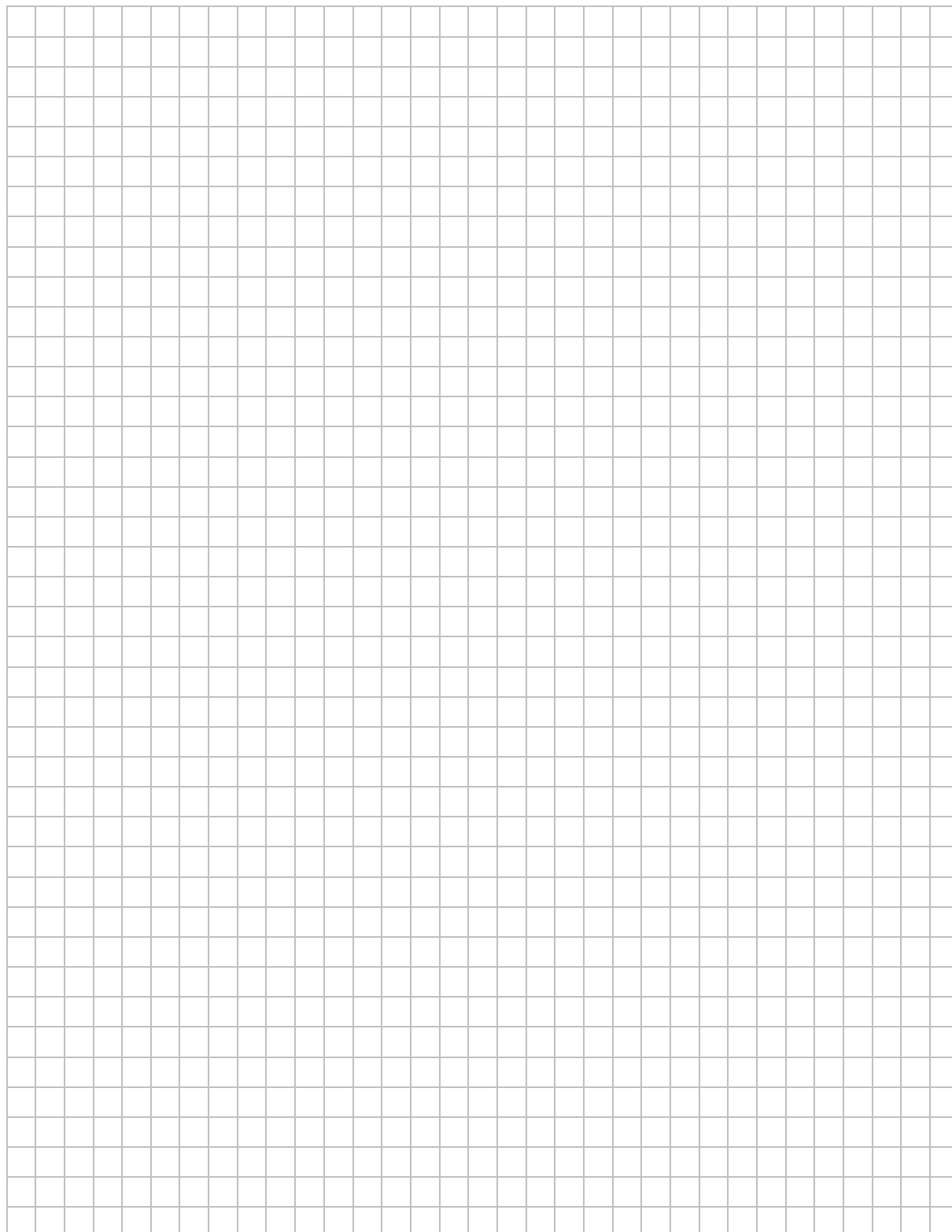
W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucił o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbcza król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k , dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.



Zadanie 7. (6 pkt)

Źródło: CKE 2009 (PR), zad. 7.

Ciąg $(x-3, x+3, 6x+2, \dots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.



Zadanie 8. (5 pkt)

Źródło: CKE 2010 (PR), zad. 5.

O liczbach a , b , c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+c=10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

