

# Funkcja kwadratowa – poziom rozszerzony

Zadanie 1. (8 pkt)

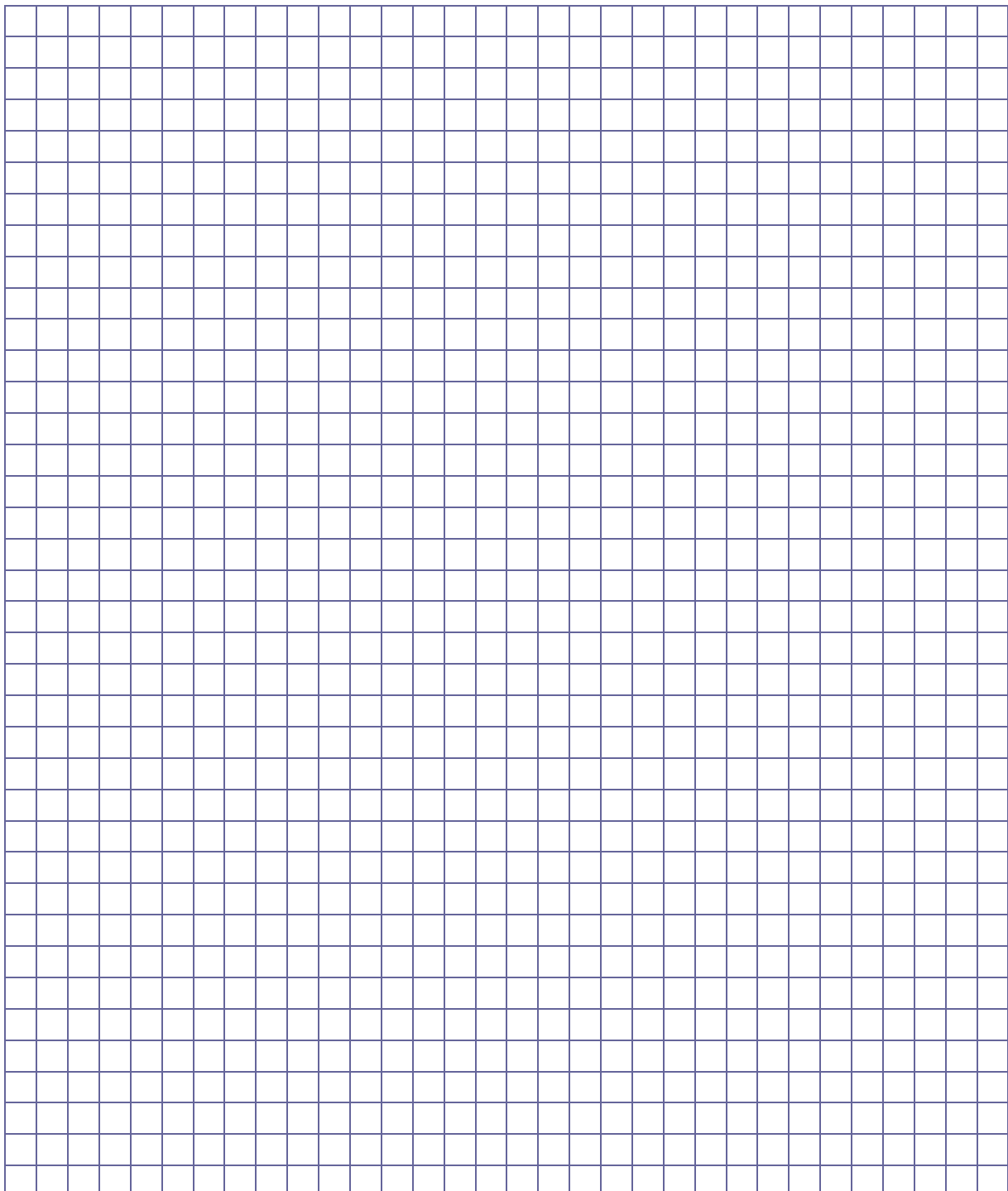
Źródło: CKE 2005 (PR), zad. 18.

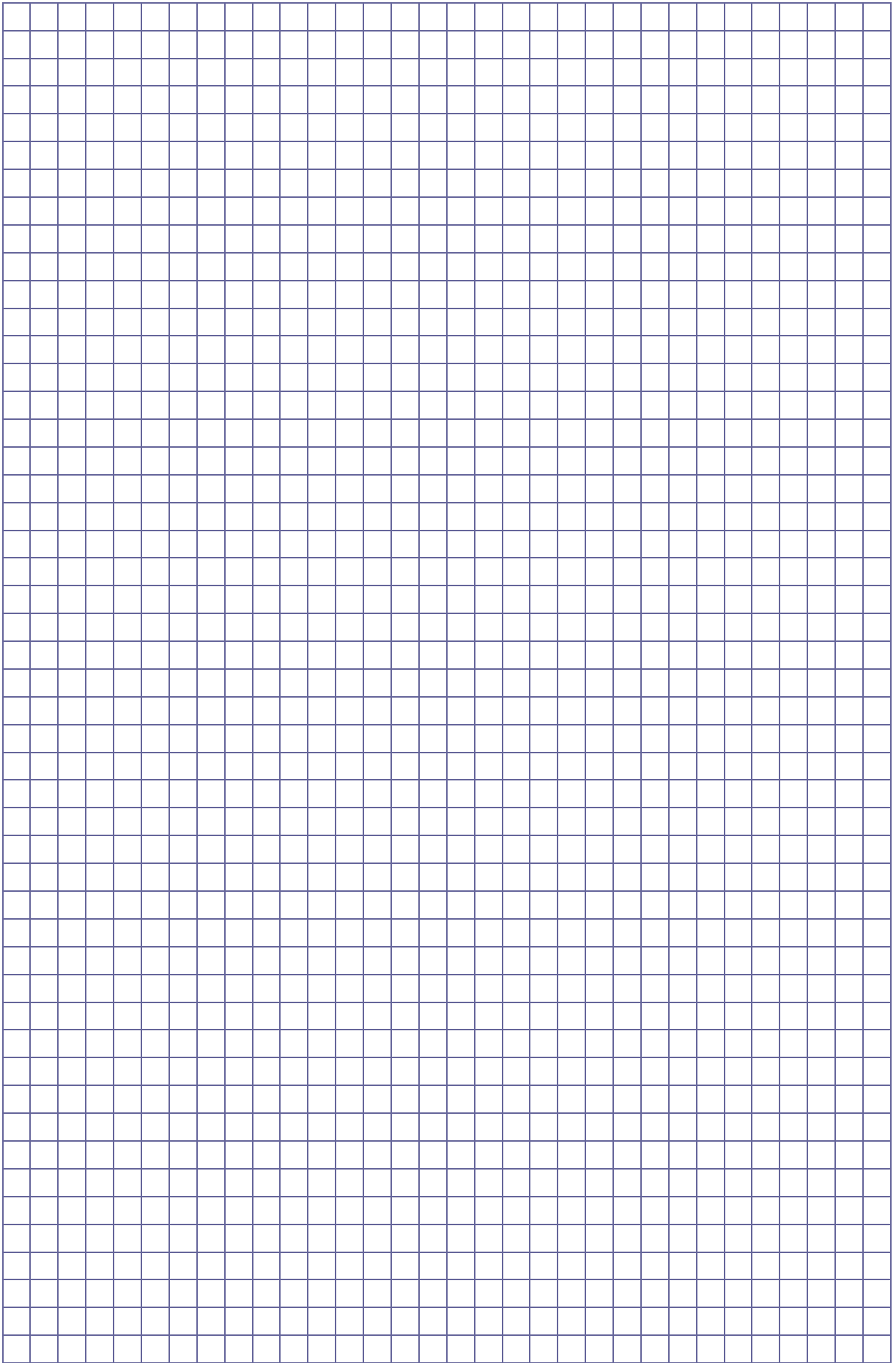
Pary liczb  $(x, y)$  spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego  $ABCD$ .

- Wyznacz współrzędne punktów:  $A, B, C, D$ .
- Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ .

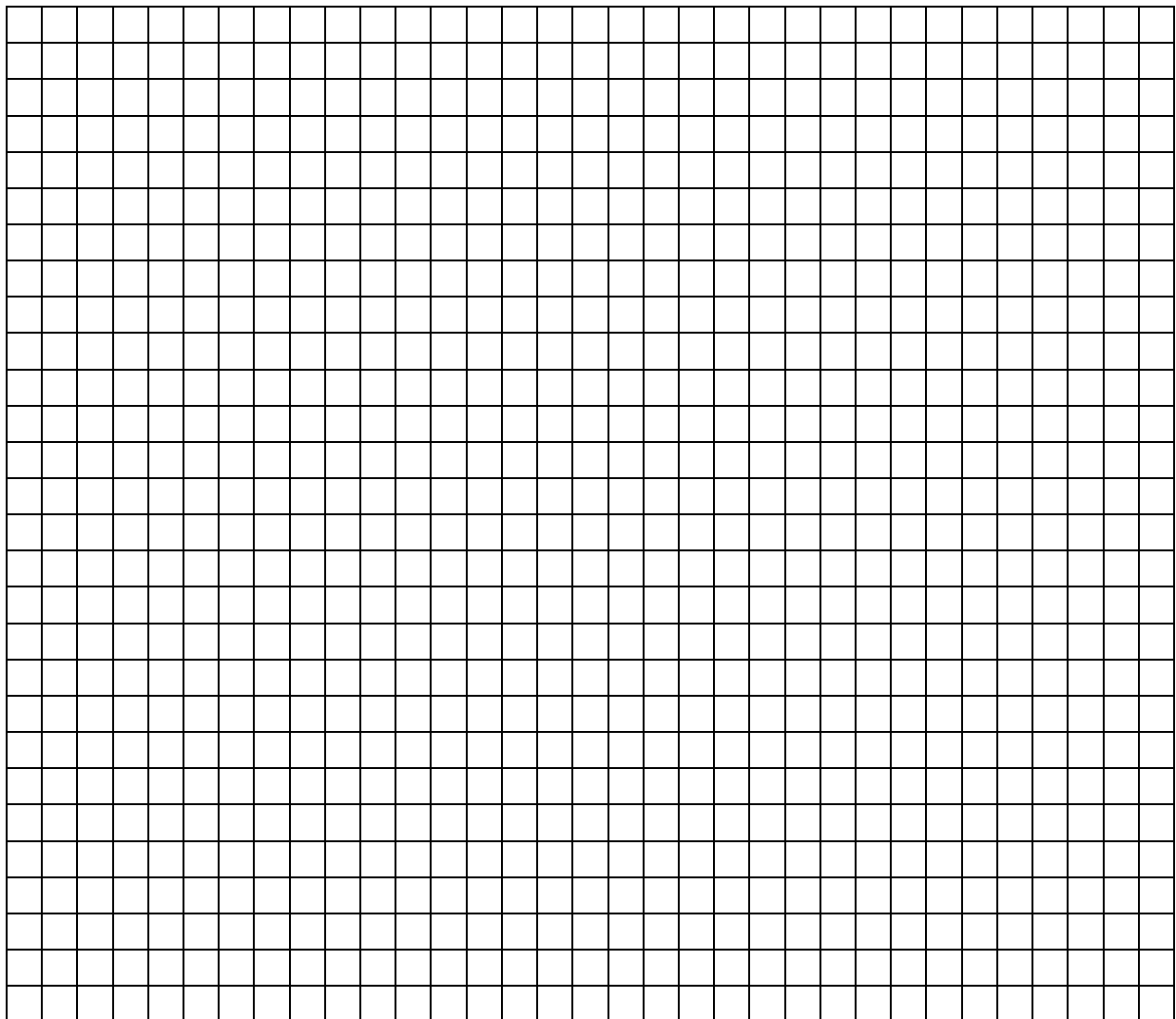
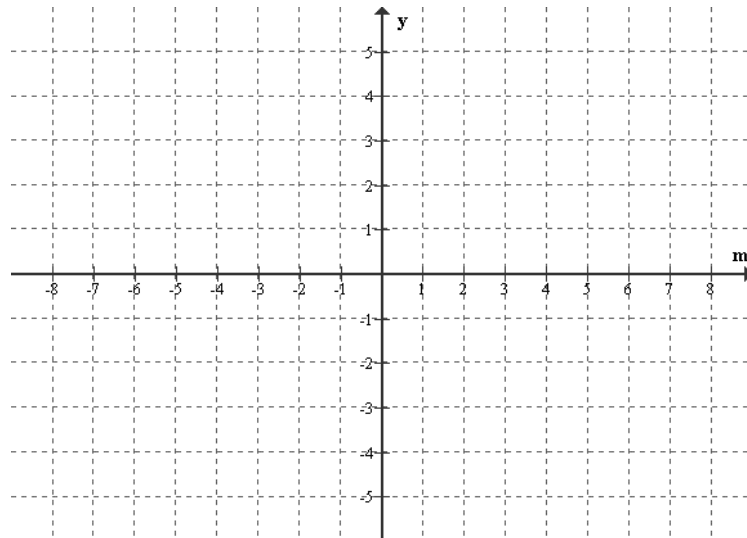




Zadanie 2. (6 pkt)

Źródło: CKE 01.2006 (PR), zad. 11.

Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji  $f$  danej wzorem  $f(m) = x_1 \cdot x_2$ , gdzie  $x_1, x_2$  są różnymi pierwiastkami równania  $(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m+2 = 0$ , w którym  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

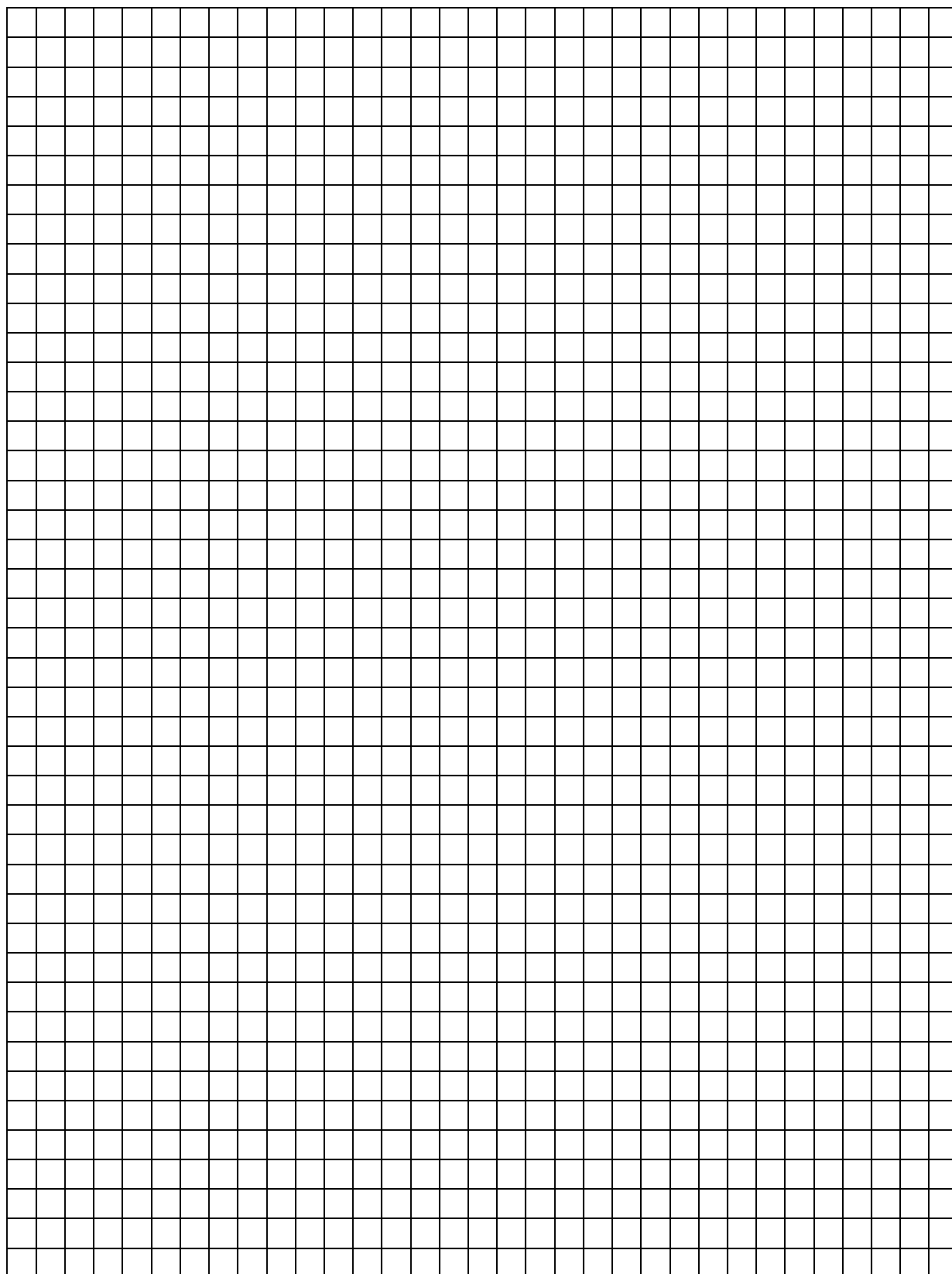


Zadanie 3. (4 pkt)

Źródło: CKE 01.2006 (PR), zad. 12.

Rozwiąż układ równań

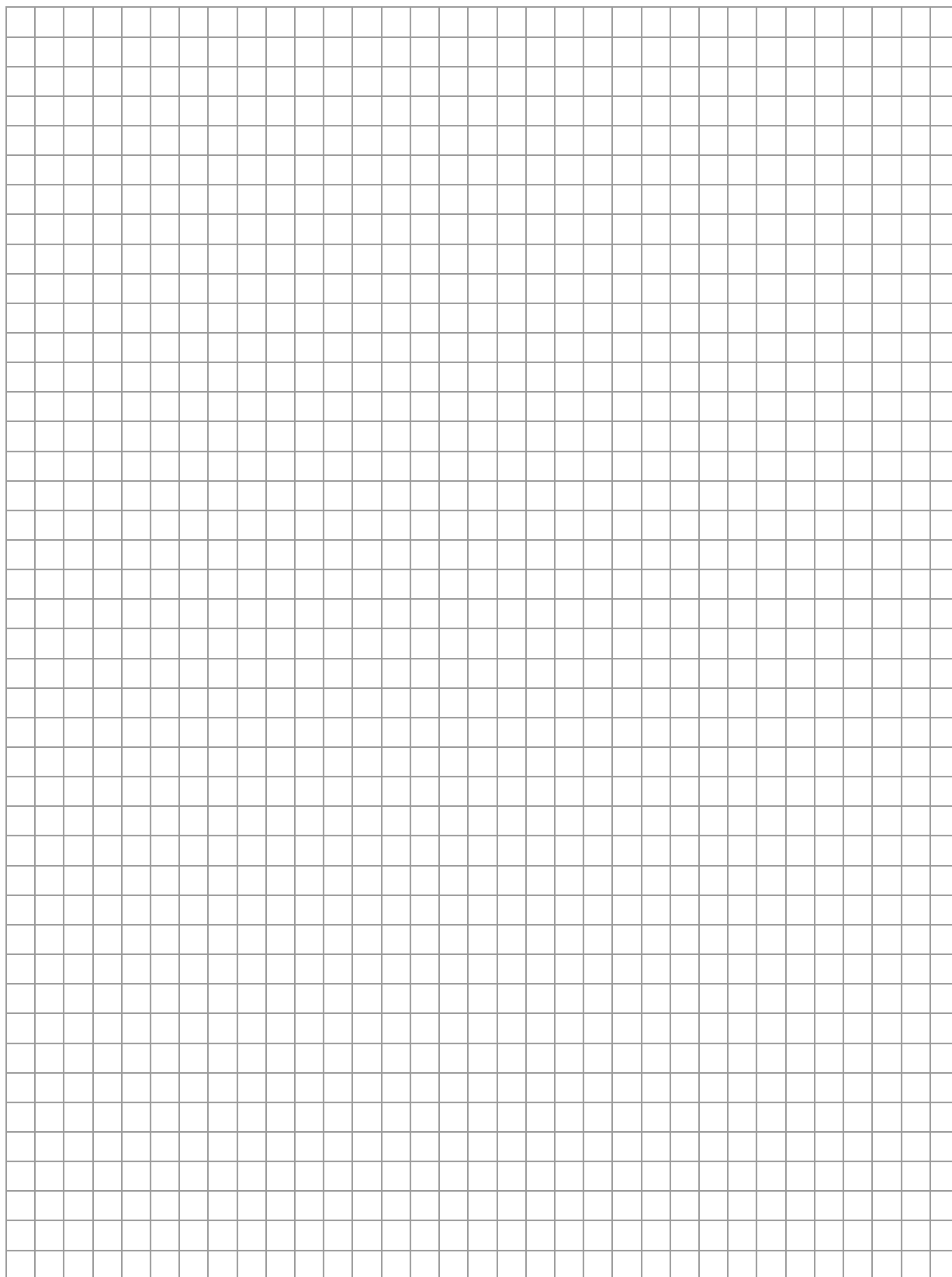
$$\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases}$$



Zadanie 4. (3 pkt)

Źródło: CKE 11.2006 (PR), zad. 5.

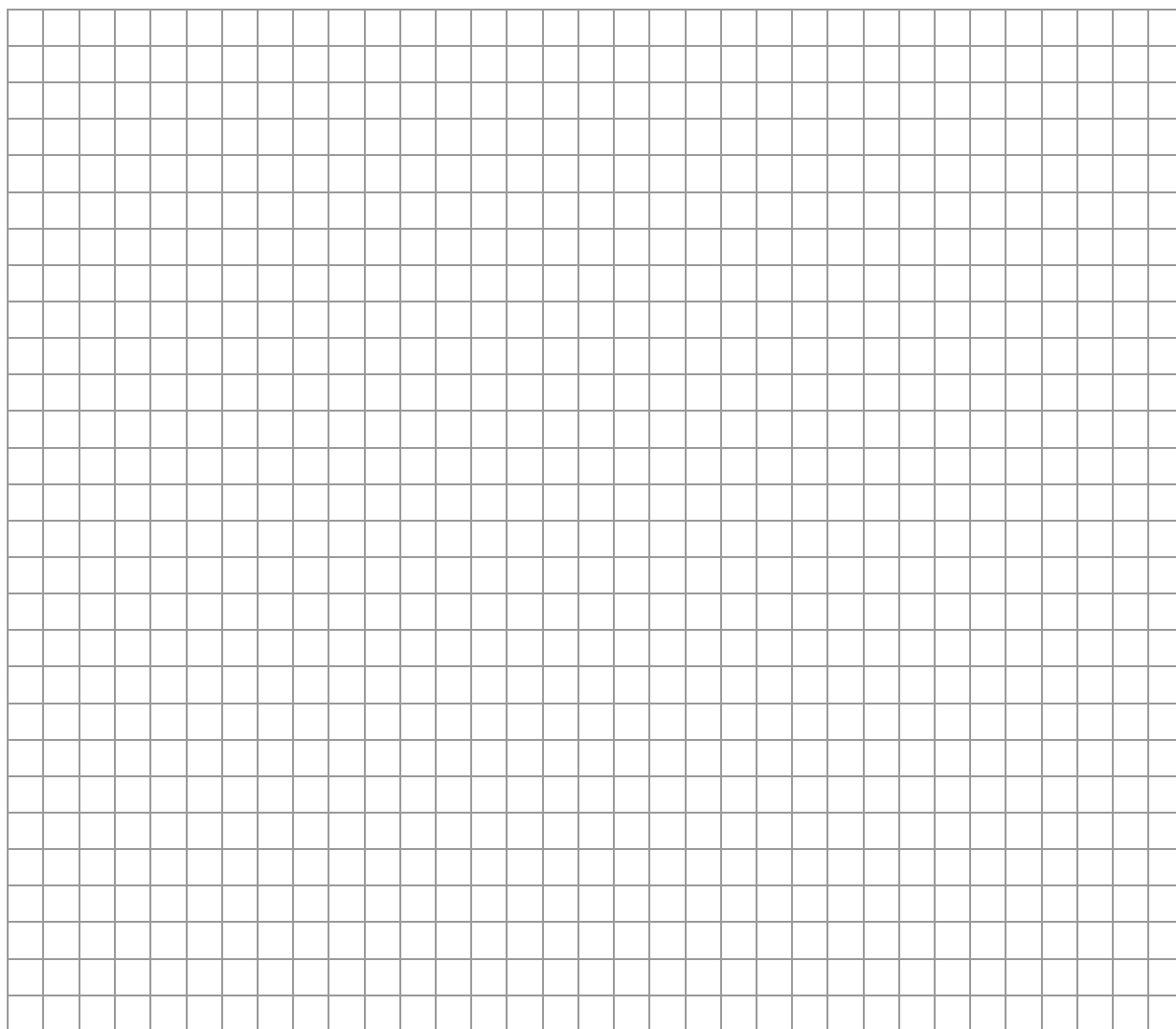
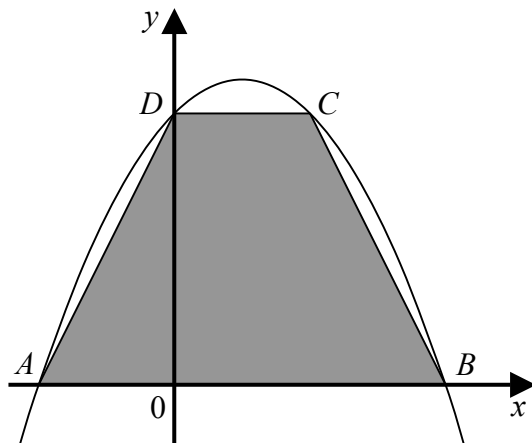
Sporządź wykres funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = 2|x| - x^2$ , a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości  $x$ , dla których funkcja  $f$  przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości  $x$ , dla których przyjmuje minima lokalne.



Zadanie 5. (4 pkt)

Źródło: CKE 11.2006 (PR), zad. 6.

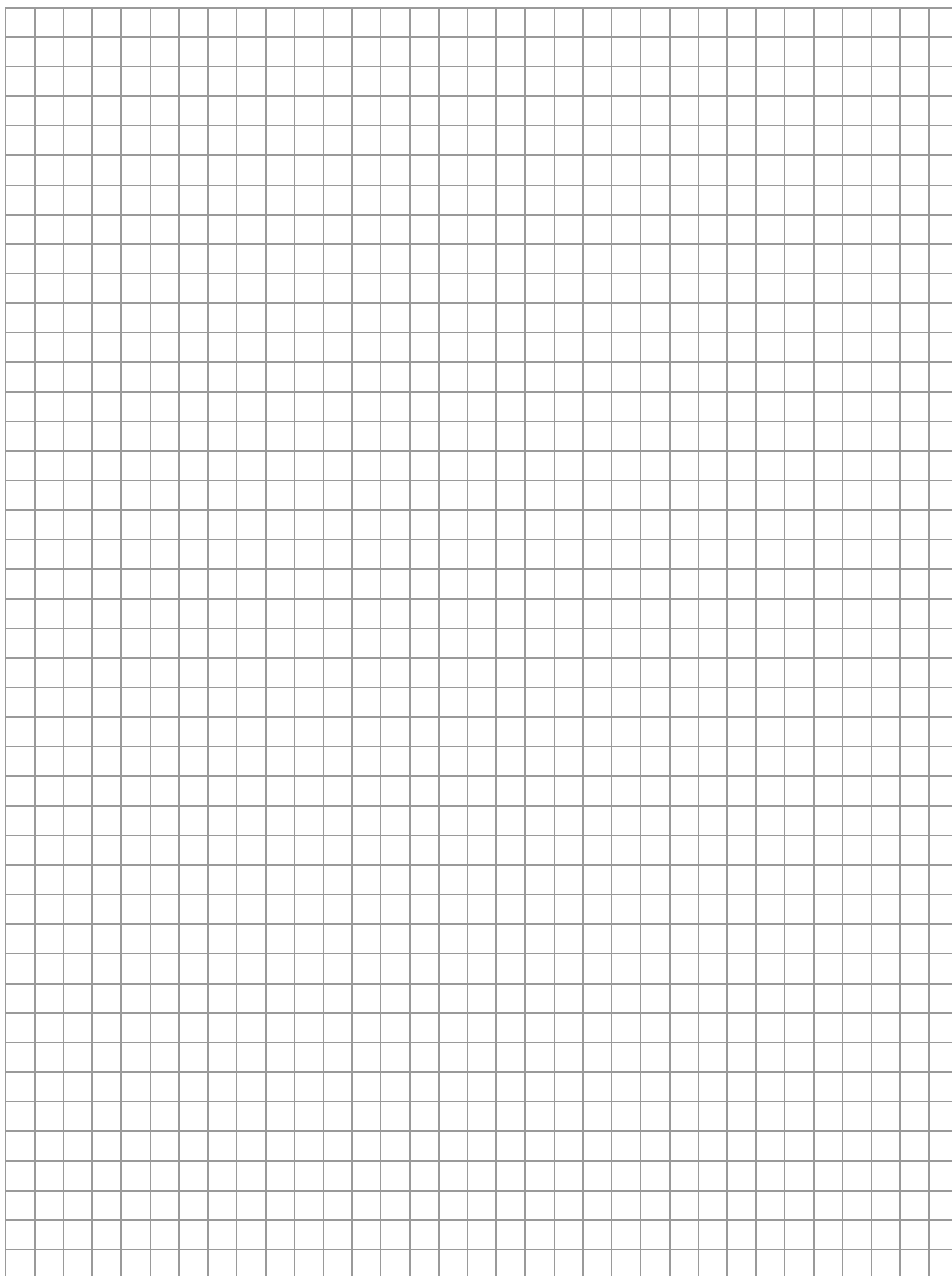
Podstawa  $AB$  trapezu  $ABCD$  jest zawarta w osi  $Ox$ , wierzchołek  $D$  jest punktem przecięcia paraboli o równaniu  $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$  z osią  $Oy$ . Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



Zadanie 6. (3 pkt)

Źródło: CKE 11.2006 (PR), zad. 11.

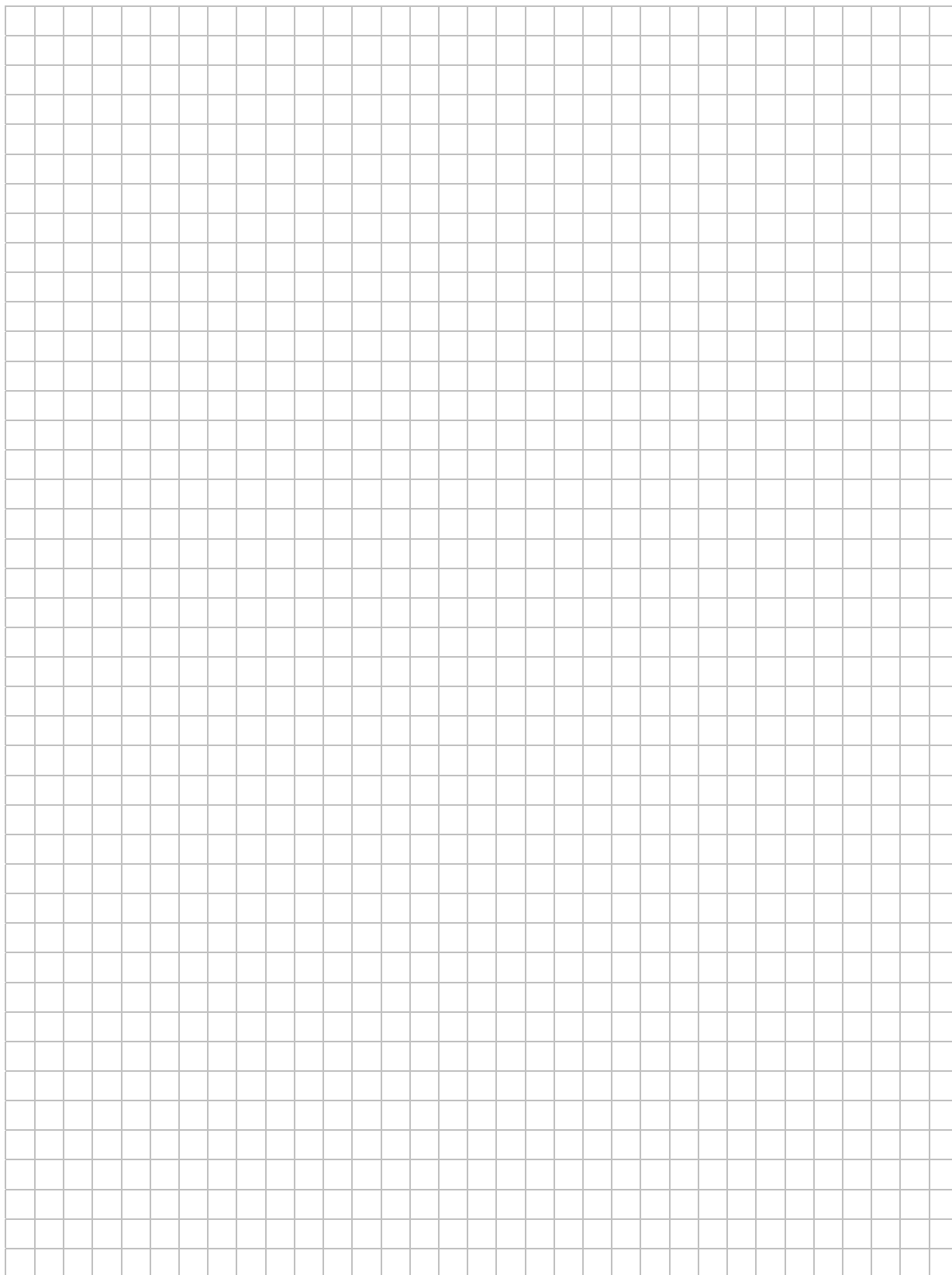
Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej  $n > 1$  największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność  $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$  o niewiadomej  $x$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$ .



Zadanie 7. (7 pkt)

Źródło: CKE 2007 (PR), zad. 5.

Wierzchołki trójkąta równobocznego  $ABC$  są punktami paraboli  $y = -x^2 + 6x$ . Punkt  $C$  jest jej wierzchołkiem, a bok  $AB$  jest równoległy do osi  $Ox$ . Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

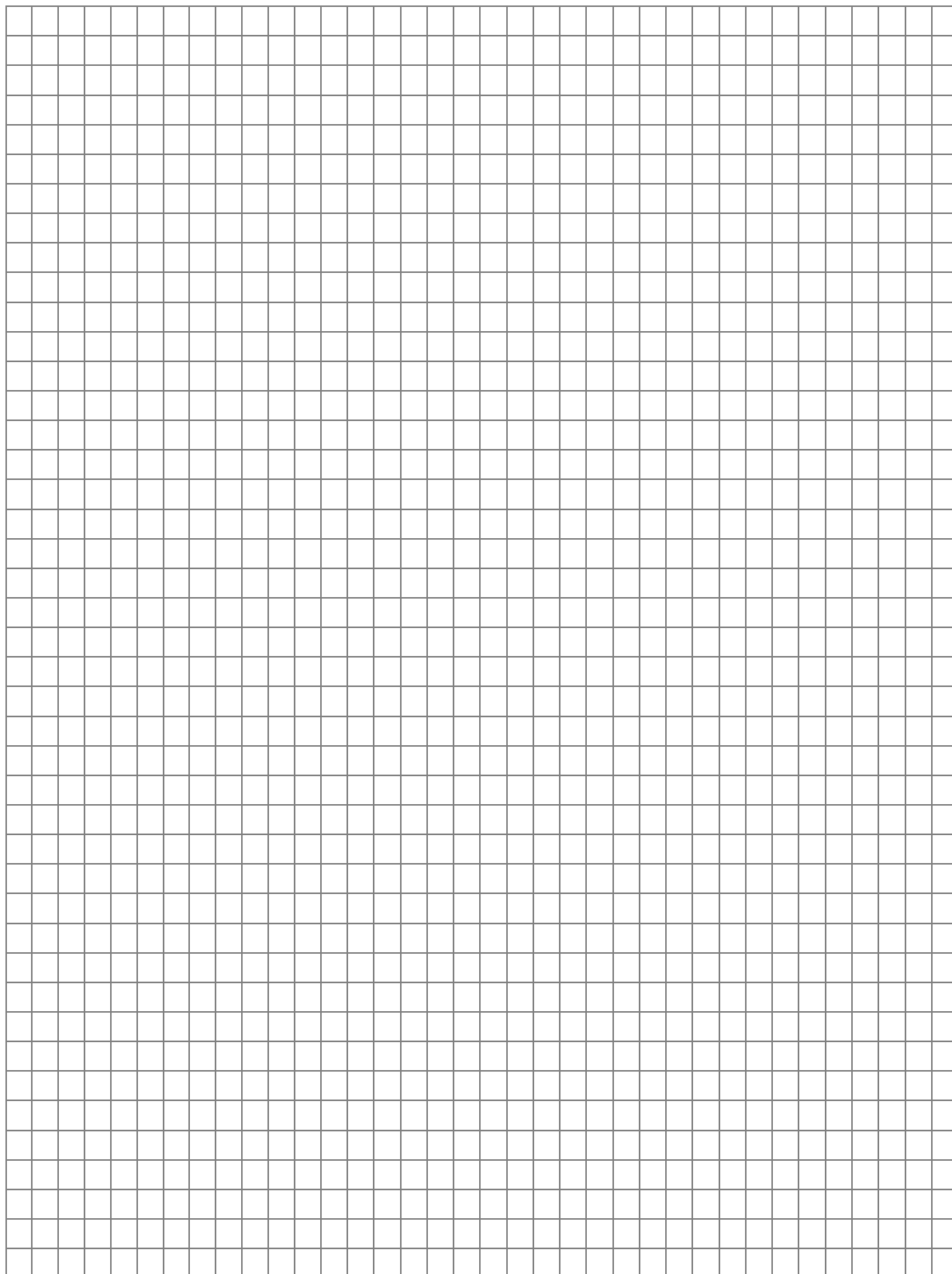




Zadanie 8. (5 pkt)

Źródło: CKE 2008 (PR), zad. 3.

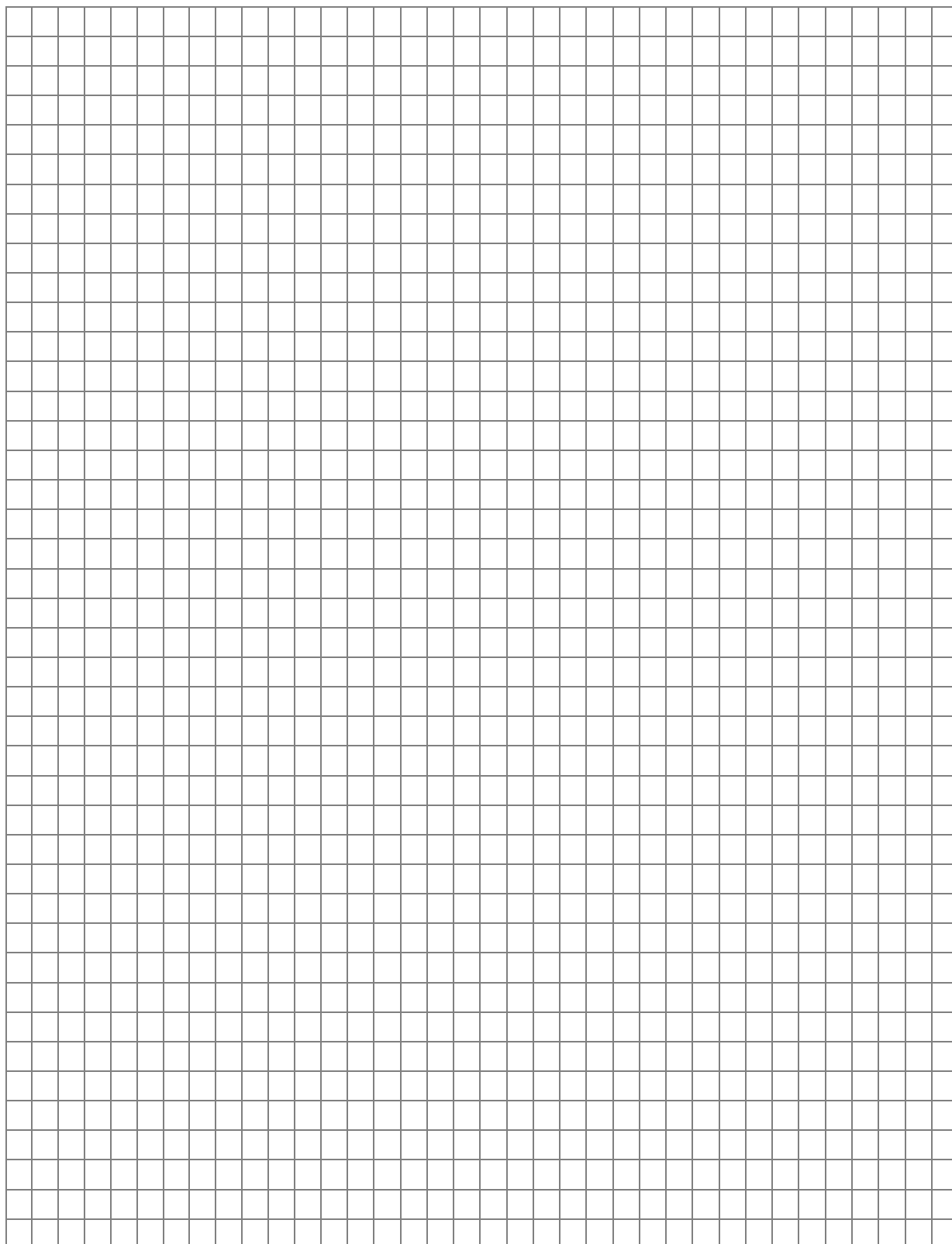
Liczby  $x_1 = 5 + \sqrt{23}$  i  $x_2 = 5 - \sqrt{23}$  są rozwiązaniami równania  $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p + q) = 0$  z niewiadomą  $x$ . Oblicz wartości  $p$  i  $q$ .



Zadanie 9. (4 pkt)

Źródło: CKE 2008 (PR), zad. 7.

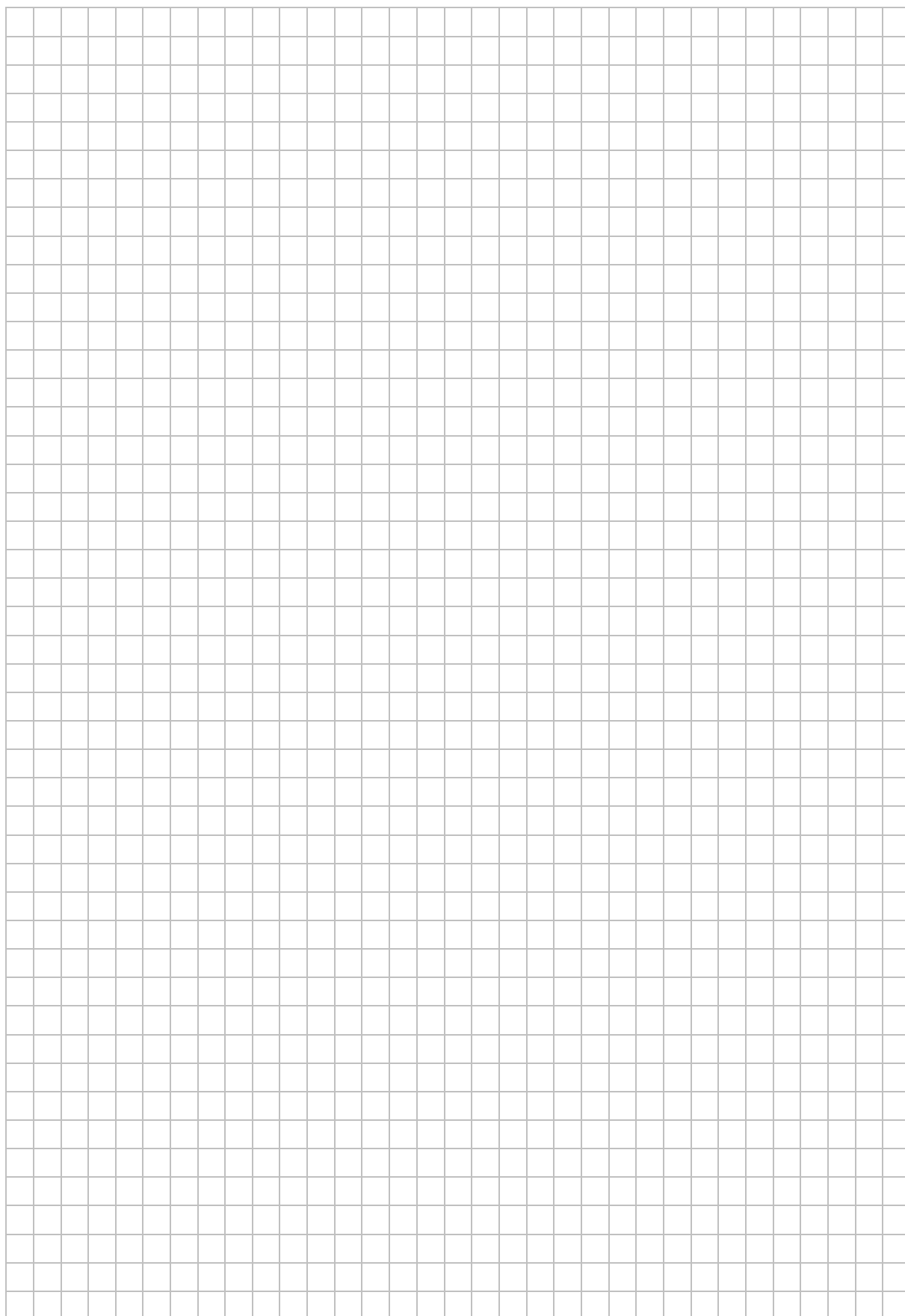
Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$  jest równoodległy od osi  $Ox$  i od punktu  $F = (0, 2)$ .

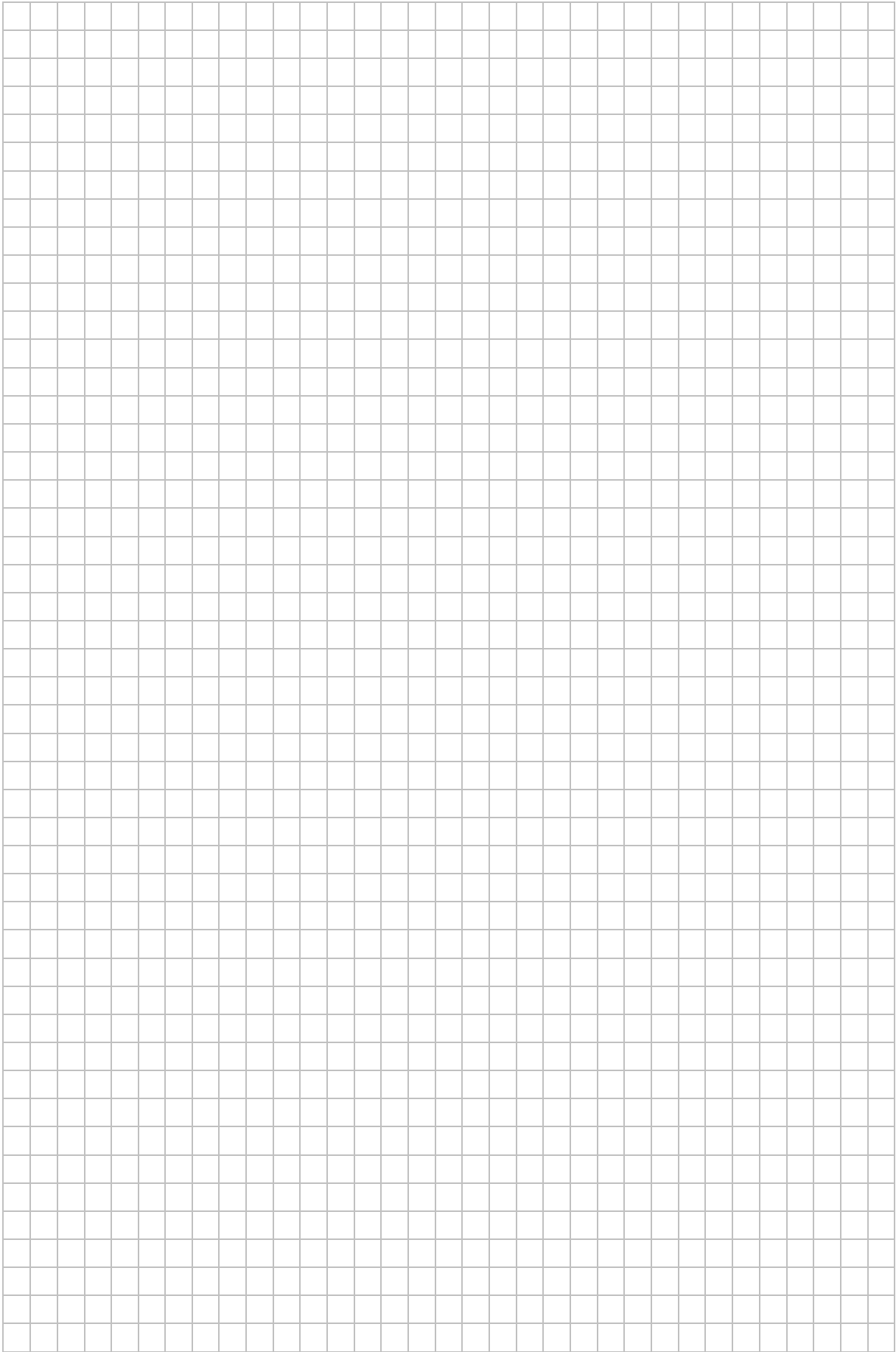


Zadanie 10. (4 pkt)

Źródło: CKE 2010 (PR), zad. 3.

Bok kwadratu  $ABCD$  ma długość 1. Na bokach  $BC$  i  $CD$  wybrano odpowiednio punkty  $E$  i  $F$  umieszczone tak, by  $|CE| = 2|DF|$ . Oblicz wartość  $x = |DF|$ , dla której pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze.





Zadanie 11. (5 pkt)

Źródło: CKE 2010 (PR), zad. 6.

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + mx + 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od  $2m^2 - 13$ .

