PODSTAWA PROGRAMOWA PRZEDMIOTU *MATEMATYKA*

IV etap edukacyjny

Cele kształcenia – wymagania ogólne

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
1. Liczby rzeczywiste. Uczeń:	
1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg); 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych); 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $\lvert x-a\rvert = b$, $\lvert x-a\rvert < b$, $\lvert x-a\rvert \geq b$, 2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; 5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką); 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym; 7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia; 8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; 9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).	
2. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:	
1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$; 2) dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$; 3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias; 4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany; 5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
	6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne
3. Równania i nierówności. Uczeń:	
1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; 4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą; 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$; 8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2, \quad \frac{x+1}{x} = 2x.$	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje wzory Viète'a; 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; 4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$; 5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych; 6) rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych; 7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe; 8) rozwiązuje proste nierówności wymierne typu: $\frac{x+1}{x+3} > 2, \quad \frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$ $\frac{3x-2}{4x-7} \le \frac{1-3x}{5-4x}$ 9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\|x+1|-2| = 3, \; |x+3|+|x-5| > 12.$

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
4. Funkcje. Uczeń:	
1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego; 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą); 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$; 5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru; 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie; 7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; 8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \|f(x)\|$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$; 2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; 3) posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym; 4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym; 12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym); 13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = a/x$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi; 14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; 15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.	
5. Ciągi. Uczeń	
1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; 3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym; 2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; 3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.
6. Trygonometria. Uczeń:	
1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°; 2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
(odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną); 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; 5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.	2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego); 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; 4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\operatorname{tg} x > a$); 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = ½$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < ½$.
7. Planimetria. Uczeń:	
1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; 2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych; 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów; 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych; 3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.); 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
	5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.
8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:	
1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych; 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka; 6) oblicza odległość dwóch punktów; 7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności; 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych; 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza odległość punktu od prostej; 5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności; 6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu; 7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach; 8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.
9. Stereometria. Uczeń:	
1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; 3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów; 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną; 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.	2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.
10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:	
1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych; 2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania; 3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych; 2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe; 3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
11. Rachunek różniczkowy. Uczeń:	
	1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych; 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej; 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby edukacyjne uczniów, szkoła organizuje zajęcia zwiększające szanse edukacyjne dla uczniów mających trudności w nauce matematyki oraz dla uczniów, którzy mają szczególne zdolności matematyczne.

W przypadku uczniów zdolnych, można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki.

w postaci ułamków jest nieokresowość ich rozwinięć dziesiętnych. Ale okresowość ma znaczenie w szkole jedynie w przypadku, gdy okres jest niezbyt długi i da się wypisać.

Zapewne w podręcznikach znajdzie się informacja o istnieniu liczb niewymiernych, a także informacja o niewymierności liczb π i $\sqrt{2}$. Nie wymaga się jednak, by uczeń umiał wśród kilku podanych liczb wskazać liczby niewymierne.

Bryły

W szkole podstawowej uczeń uczy się rozpoznawania graniastosłupów prostych, ostrosłupów, walców, stożków i kul oraz rozpoznawania siatek graniastosłupów prostych i ostrosłupów i rysowania siatek prostopadłościanów. Oblicza objętości prostopadłościanów.

Umiejętności związane z obliczaniem pól powierzchni i objętości innych brył uczeń nabywa w gimnazjum: pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli. W gimnazjum uczeń powinien potrafić uzasadnić, dlaczego dany graniastosłup i ostrosłup są prawidłowe oraz wyróżnić graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe wśród innych brył.

Dlaczego mamy obowiązkową maturę z matematyki? Czy jest to konieczne?

Czy polski system edukacyjny może funkcjonować bez obowiązkowej matury z matematyki? Oczywiście może – taka właśnie sytuacja miała miejsce przez ostatnie lata – ale funkcjonuje wadliwie, co jest szczególnie widoczne z perspektywy kilkunastu lat. Doprowadziło to do niekorzystnych zjawisk, za które w końcu płaci całe społeczeństwo.

Matematyka jest niezbędnym narzędziem i językiem potrzebnym do korzystania z ogromnej części dorobku cywilizacyjnego. Język ten jest trudny, wymaga wieloletniej, systematycznej nauki i co bardzo ważne – uczyć się go trzeba w odpowiednim wieku. Jeżeli człowiek nie opanuje pewnych umiejętności matematycznych w wieku szkolnym, to ma niewielkie szanse na nadrobienie zaległości w wieku dojrzałym. Obecnie wprawdzie uczeń ma możliwość przyswojenia sobie znaczącej porcji umiejętności matematycznych, ale nie musi. A ponieważ matematyka jest trudna, więc młodzi ludzie w większości postępują racjonalnie, zmierzając do egzaminu dojrzałości po najkorzystniejszej z ich punktu widzenia drodze. Jednak to, co może być korzystne z punktu widzenia pojedynczej osoby, może zarazem stwarzać poważne problemy w skali społecznej.

Chociaż obowiązkowa matura z matematyki została zniesiona wiele już lat temu, skutki tego szczególnie ostro objawiają się w ostatnich latach. Dawniej liczba miejsc na studia była mniejsza od liczby kandydatów. By otrzymać indeks, trzeba było zdać egzamin wstępny. Poziom wymagań na egzaminie wstępnym na uczelnie techniczne, ekonomiczne i kierunki przyrodnicze uniwersytetów skutecznie regulował poziom nauczania matematyki w szkołach

ponadgimnazjalnych. W ostatnich jednak latach ten mechanizm przestał działać. Zniesiono egzaminy wstępne, postanawiając, że jedynym kryterium przyjęcia na studia jest wynik egzaminu maturalnego. Ustawodawca zakładał, że w zasadzie nic się nie zmieni, bo uczelnie techniczne i podobne będą rekrutować w oparciu o wynik egzaminu maturalnego z matematyki. Niestety doszło do zderzenia dwu tendencji: niżu demograficznego (pogłębionego emigracją zarobkową) i zwiększenia liczby miejsc na studiach związanego ze zmianami zasad finansowania szkolnictwa wyższego i rozwojem szkolnictwa prywatnego. Aktualnie więc sytuacja wygląda tak, że na wiele kierunków technicznych i matematyczno-przyrodniczych może się dostać każdy, kto chce, a i tak pozostaje wiele wolnych miejsc. Nie ma chętnych na te studia, bo kandydaci wiedzą, że w ich programie jest matematyka i jej zaliczenie stanowi duży problem. Oblegane są natomiast kierunki niewymagające matematyki, np. pedagogika czy zarządzanie. Rektorzy wyższych uczelni alarmują, że taki stan grozi poważnymi komplikacjami na rynku pracy i tym, że Polska będzie przegrywać międzynarodową rywalizację. Już dziś brakuje inżynierów niektórych specjalności, a wobec otwarcia rynku pracy na Zachodzie sytuacja się nie poprawi. Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego uruchomiło w tym roku (2009) specjalny program stypendialny, ale jest to rozwiązanie doraźne.

Co gorsza, wielu uczniów już po szkole podstawowej nastawiała się, że nie będzie zdawać matury z matematyki i wobec tego nie miała motywacji do uczenia się tego przedmiotu w gimnazjum.

W tej sytuacji najlepszym rozwiązaniem jest powrót do obowiązkowej matury z matematyki. Opory, jakie u wielu młodych ludzi budzi matematyka, wynikają często z braku zainteresowania, bliższego kontaktu, niepodejmowania próby przezwyciężenia choćby niewielkich trudności matematycznych. Obowiązkowa matura wymusi opanowanie podstawowych umiejętności (działania na ułamkach, najprostsze przekształcenia algebraiczne), na których brak powszechnie narzekają wykładowcy wyższych uczelni. Organizuje się tzw. zajęcia wyrównawcze z matematyki na pierwszym roku studiów, ale to jedynie nieco łagodzi problem.

Wiadomo też, że „myślenie matematyczne" jest cenione przez wykładowców innych kierunków (np. prawników, filozofów). Rozwijanie tego typu myślenia jest bardzo ważne dla ogólnego rozwoju ucznia.

Jaką rolę ma pełnić zakres podstawowy, a jaką zakres rozszerzony?

W każdym roczniku jest wielu uczniów utalentowanych matematycznie i takich, których aspiracje sięgają wyżej niż skromny zakres dla wszystkich. To przyszli kandydaci na matematykę, informatykę, fizykę i bardziej wymagające kierunki techniczne. Trzeba im umożliwić zdobywanie wiedzy i rozwijanie zainteresowań na poziomie zdecydowanie wyższym, niż to zakłada podstawa dla wszystkich.

W szkole podstawowej, w gimnazjum i w I klasie liceum, tj. przez 10 lat, podstawa programowa jest jednolita dla wszystkich uczniów. Natomiast przez

pozostałe dwa lata mamy wyraźne różnicowanie zakresu nauki. Uczniowie mają opanować w szerszym zakresie te przedmioty, z którymi wiążą swoją przyszłość zawodową.

Zakłada się więc, że uczeń zamierzający studiować np. matematykę czy fizykę wybierze rozszerzony zakres z matematyki. I to nie dlatego, że matura na poziomie podstawowym miałaby wykluczyć staranie się o przyjęcie na te kierunki (bo nie wykluczy), ale dlatego że mając opanowany tylko podstawowy zakres umiejętności, trudno będzie zaliczyć pierwszy semestr na takich kierunkach studiów. Podstawa dla zakresu rozszerzonego jest daleko bogatsza w treści niż dla zakresu podstawowego, chociaż jest istotnie uboższa niż program dawnych klas matematyczno-fizycznych.

Dlaczego z podstawy dla liceum usunięto elementy logiki matematycznej?

Maturzysta nie będzie miał obowiązku znajomości symboli logiki formalnej. W dyskusjach wysunięto zarzut, że na skutek tego nie będzie się rozwijać logicznego myślenia. Nie jest to zarzut słuszny. W podstawie dla liceum wśród wymagań ogólnych mamy część zatytułowaną: „rozumowanie i argumentacja" – wymaganie to sformułowane jest osobno dla zakresu podstawowego i dla rozszerzonego. Szkoła ma nadal uczyć rozumowania matematycznego i na maturze będą zadania, które to sprawdzają. Rozumowań należy uczyć w trakcie wszelkich wywodów matematycznych, przez cały okres nauki szkolnej, dostosowując je do aktualnych możliwości uczniów.

Znajomość ogólnych pojęć i symboli rachunku zdań i kwantyfikatorów nie jest ani warunkiem koniecznym, ani dostatecznym dla logicznego rozumowania w matematyce. Przekonali się o tym wielokrotnie wykładowcy wyższych uczelni: student może znać te symbole, ale nieraz nie ułatwia mu to prowadzenia poprawnego rozumowania.

Nadmiar symboli raczej utrudnia niż ułatwia czytanie tekstów matematycznych. Łatwiej np. czyta się wzór, w którym jest słowo „lub" niż znak alternatywy, np. porównując dwa sposoby zapisu:

$$x < -3 \quad \vee \quad x > 7, \qquad\qquad x < -3 \quad \text{lub} \quad x > 7,$$

widać, że prawy zapis wymaga mniejszego wysiłku, zarówno na poziomie szkolnym, jak i zaawansowanym uniwersyteckim. Ponadto symbol alternatywy, zwłaszcza w przypadku pisma ręcznego, łatwo można pomylić z literami V i v (oznaczającymi m.in. objętość, prędkość itp.).

Przeplatany język symboli ze słowami języka polskiego najłatwiej się czyta i rozumie. Nadmiar symboli czyni tekst trudniejszym nawet dla osoby z tym obytej.

Jedyne symbole, które są naprawdę poręczne, to strzałka implikacji $\Rightarrow$ i dwustronna strzałka równoważności $\Leftrightarrow$. Ale aby używać takich strzałek, wcale niepotrzebna jest cała teoretyczna wiedza z rachunku zdań. Wystarczy używać ich w konkretnych sytuacjach jako uzupełnienie słów „jeżeli" i „to". Ich sens wyłania się stopniowo uczniowi przy rozpatrywaniu

odpowiednich zagadnień matematycznych (np. w klasach IV–VI „jeżeli liczba jest podzielna przez 6, to ...").

Wszystkie elementy logiki, jakie mogą i powinny pojawić się w nauczaniu licealnym, dadzą się w pełni realizować z wykorzystaniem naturalnego języka polskiego, na bieżącym materiale matematycznym, a nie jako osobny dział i cel sam w sobie.

Podsumowując, uczeń ma przeprowadzać rozumowania matematyczne związane z materiałem opisanym w podstawie programowej, nie ma jednak obowiązku znać specjalnych terminów logicznych ani symboli.

Dlaczego w liceum nie ma elementów teorii mnogości?

Samo pojęcie zbioru, intuicyjnie rozumiane, pojawia się w podstawie wielokrotnie (również w zakresie podstawowym). Nie ma natomiast symboli działań na zbiorach. Nie wymaga się od maturzysty systematycznego stosowania języka zbiorów ani znajomości specjalnych symboli, tak jak np. $x \in A$ czy $A \cap B$. Pojęcie zbioru może i powinno być używane tam, gdzie to jest naturalne i wygodne, np. że okrąg jest zbiorem punktów jednakowo oddalonych od środka lub określanie dziedziny funkcji. Pojęcie zbioru niezbędne jest też m.in. przy geometrii płaszczyzny kartezjańskiej.

Natomiast dla rachunku prawdopodobieństwa, w takim zakresie, jaki będzie wymagany od przyszłych maturzystów, znajomość działań na zbiorach nie jest konieczna. Pojęcie przestrzeni probabilistycznej i prawdopodobieństwo warunkowe wyrażone w języku zbiorów są dla przeciętnego ucznia trudne i nie są konieczne do wyrobienia intuicji prawdopodobieństwa. Oczywiście podstawa określa, co uczeń ma umieć, natomiast nauczyciel może uczyć więcej i szerzej.

Pamiętać należy, że nie jest celowe budowanie aparatu pojęciowego do podania np. abstrakcyjnej definicji funkcji, bowiem dla ucznia i tak funkcja będzie jedną z tych niewielu, z którymi się zapoznał (liniowe, kwadratowe, trygonometryczne). Sensowne jest natomiast nauczanie wzbogacające o nowe, konkretne fakty, dla których usystematyzowania w przyszłości uczeń zaakceptuje pojęcia mnogościowe.

Co maturzysta ma wiedzieć o funkcjach potęgowych, wykładniczych i logarytmicznych?

Pełny, dawniejszy zakres funkcji elementarnych dla wszystkich uczniów nie da się zrealizować.

Poważne trudności pojawiają się już na poziomie definicji, a czasu na nauczanie jest mało. W zakresie podstawowym uczeń oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na takich potęgach. Ponadto wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi o wykładniku naturalnym. W zakresie podstawowym nie wymaga się funkcji potęgowych i logarytmicznych, natomiast trzeba mieć

pewną wiedzę o funkcjach wykładniczych ze względu na ich fundamentalne znaczenie nie tylko naukach przyrodniczo-technicznych, lecz też w naukach społecznych, w ekonomii, w lingwistyce.

W zakresie rozszerzonym wymaga się m.in. logarytmu potęgi o dowolnym wykładniku, wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz funkcji logarytmicznych, ale nie tyle, co ongiś w klasach matematyczno-fizycznych.

Co maturzysta ma umieć z trygonometrii?

W zakresie podstawowym ważne jest wymaganie: *uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od* 0° *do* 180°. Wychodzi się więc poza kąty ostre, ale nie rozważa się dowolnych kątów. Głównym argumentem było to, że taki zakres kątów jest niezbędny dla interpretacji współczynnika w równaniu kierunkowym prostej $y = ax + b$ jako tangensa kąta nachylenia prostej. Tyle też potrzeba do obliczeń związanych z trójkątami rozwartokątnymi. W zakresie podstawowym nie ma jednak ani miary łukowej kąta, ani funkcji trygonometrycznych kątów skierowanych. Więcej wymaga się w zakresie rozszerzonym, w tym znajomość podstawowych wzorów.

Dlaczego w nowej podstawie nie ma funkcji cotangens?

Złożyło się na to wiele przyczyn. Najważniejsze to, że funkcja ta nie jest niezbędna, bowiem $\mathrm{ctg}\alpha$ jest tym samym co $1/\mathrm{tg}\alpha$, a także $\mathrm{tg}\,(90° - \alpha)$ i cała trygonometria bez trudu da się wyrazić za pomocą tych trzech funkcji: sinus, cosinus, tangens. Te jedynie funkcje znajdują się na kalkulatorze. W sumie cotangens nie jest niezbędny.

Kiedyś w szkole uczono sześciu funkcji trygonometrycznych. Później usunięto z programu dwie z nich, mianowicie funkcje secans i cosecans. Mało kto dziś o nich wie, bo to była po prostu odwrotność cosinusa i odwrotność sinusa.

Mniej funkcji – to mniej nazw, mniej definicji, mniej wzorów do pamiętania.

Dlaczego w podstawie nie ma pojęcia granicy funkcji, ani rachunku różniczkowego?

Nie ma tego w zakresie podstawowym z oczywistego powodu. Skoro matura ma być obowiązkowa dla wszystkich, nie można wymagać materiału, który – ze swej istoty – dla całej populacji młodzieży byłby zbyt trudny. Rachunek różniczkowy jest bardzo czasochłonny. Pośpieszne jego przerabianie mijałoby się z celem. Nauczyciele akademiccy niemal jednogłośnie twierdzą: „Z granicami sobie poradzimy; domagamy się, by maturzyści mieli opanowane ułamki". Zamiast zmagać się z trudnym pojęciem granicy, lepiej zaoszczędzony czas wykorzystać na lepsze opanowanie tego, co obowiązkowe. Badanie nieskomplikowanych funkcji wymiernych można przeprowadzić bezpośrednio, bez obliczania pochodnych, wykonując odpowiednie przekształcenia algebraiczne.

Granice funkcji i rachunek pochodnych znajdują się w zakresie rozszerzonym wraz z najważniejszymi zastosowaniami.

W znikomym zakresie pojawia się bezwzględna wartość wyrażeń algebraicznych. Bezwzględna wartość do niedawna była uważana za ważny temat. Jednakże wykorzystywana była niemal wyłącznie w ogólnej definicji granicy, w której pojawia się nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Bezwzględnej wartości i nierównościom z nią związanym poświęcano wiele czasu. Uważano, że ważne jest to, by uczniowie umieli wykazać zbieżność pewnych ciągów wprost na podstawie definicji granicy i z tego powodu spędzano w szkole wiele czasu na przekształcaniu nierówności typu $|x - a| < b$. Ale tej definicji granicy nie ma już w szkole średniej! Z uwagi jednak na to, że takich umiejętności oczekuje część uczelni wyższych, wymagania dotyczące bezwzględnej wartości pojawiają się w liceum, ale jedynie w zakresie rozszerzonym.

Co z zasadą indukcji?

Zasada indukcji matematycznej została usunięta całkowicie, również z zakresu rozszerzonego. Jest specyficznie trudna. Stosowanie jej stało się pewnym rytuałem, którego sens pojmowali nieliczni uczniowie.

Podsumowanie

Pomimo pewnej liczby redukcji obowiązkowego materiału na każdym etapie jest bardzo dużo. Zwłaszcza dużo jest w klasach IV–VI, bowiem przeniesione zostały pewne czasochłonne tematy z klasy III do IV, wymagające więcej lekcji, niż się zwolni po przeniesieniu pewnych tematów z klasy VI do gimnazjum.

W liceum oczywiście kluczowym problemem będzie obowiązkowa matura z matematyki. We wszelkich dyskusjach o tym, co powinno się znaleźć w zakresie rozszerzonym, należy pamiętać, że nie da się tam – w skali masowej – utrzymać poziomu dawnych liceów matematyczno-fizycznych.

Podstawa programowa jest zbiorem haseł, które zostaną uszczegółowione przez autorów programów nauczania, autorów podręczników i przede wszystkim przez nauczycieli. Każde, nawet pozornie najprostsze wymaganie może być analizowane na różnych poziomach trudności. Opierając się na tej samej podstawie można opracowywać mniej lub bardziej ambitne programy. O tym, jaka będzie wykładnia podstawy programowej, zadecyduje praktyka nauczania i praktyka egzaminów maturalnych.

Po kilku latach funkcjonowania nowej podstawy programowej w wyniku współdziałania szkoły, komisji egzaminacyjnych i uczelni wyższych, ustali się pewien poziom interpretowania i realizowania obowiązujących wymagań. W szczególności wymagania stawiane na wybranych kierunkach studiów będą stymulowały uczniów do nauki.